Induksi Matematik

Bahan Kuliah
IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI - ITB

- Metode pembuktian untuk proposisi yang berkaitan dengan bilangan bulat adalah **induksi matematik**.

- Contoh:

  1. Buktikan bahwa jumlah n bilangan bilangan bulat positif pertama adalah $n(n + 1)/2$.

  2. Buktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Contoh lainnya:

1. Setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

2. Untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

3. Untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen.

4. Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali. Jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n - 1)/2$.

5. Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan n elemen adalah 2^n

- Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika.

- Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

Prinsip Induksi Sederhana.

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif.
- Kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

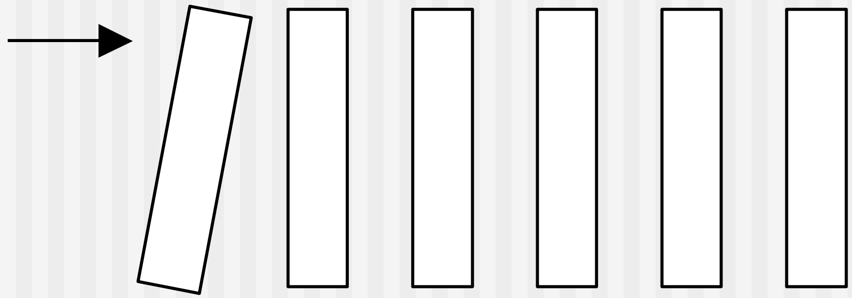
- Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
  1. $p(1)$ benar, dan
  2. jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$,

- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.

- Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.

- Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

- Induksi matematik berlaku seperti efek domino.



Contoh 1. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

<u>Penyelesaian</u>:

(i) Basis induksi: Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

(ii) Langkah induksi: Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke-n adalah $(2n - 1)$]. Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \ldots + \\ &\quad (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$,

Contoh 2. Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh: $2^0 = 2^{0+1} – 1$.

Ini jelas benar, sebab $2^0 = 1 = 2^{0+1} – 1$

$$= 2^1 – 1$$

$$= 2 – 1$$

$$= 1$$

(ii) Langkah induksi. Andaikan bahwa p(n) benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa p(n +1) juga benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1) + 1} - 1$$

juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} \\
&= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \text{ (hipotesis induksi)} \\
&= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\
&= (2 \,.\, 2^{n+1}) - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1 \\
&= 2^{(n+1) + 1} - 1
\end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ ■

Contoh 3. Untuk semua $n \geq 1$, buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi: U*ntuk $n = 1$, maka $1^3 + 2(1) = 3$ adalah kelipatan 3. jadi p(1) benar.

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan $p(n)$ benar, yaitu proposisi $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 (hipotesis induksi).

Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu $(n + 1)^3 + 2(n + 1)$ adalah kelipatan 3

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
(n + 1)^3 + 2(n + 1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2) \\
&= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 \\
&= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)
\end{aligned}
$$

- $(n^3 + 2n)$ adalah kelipatan 3 (dari hipotesis induksi)
- $3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan 3
- maka $(n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ adalah jumlah dua buah bilangan kelipatan 3
- sehingga $(n^3 + 2n)+3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan 3.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

Latihan 1

- Untuk tiap $n \geq 3$, jumlah sudut dalam sebuah poligon dengan n sisi adalah $180(n - 2)°$. Buktikan pernyataan ini dengan induksi matematik.

Jawaban Latihan

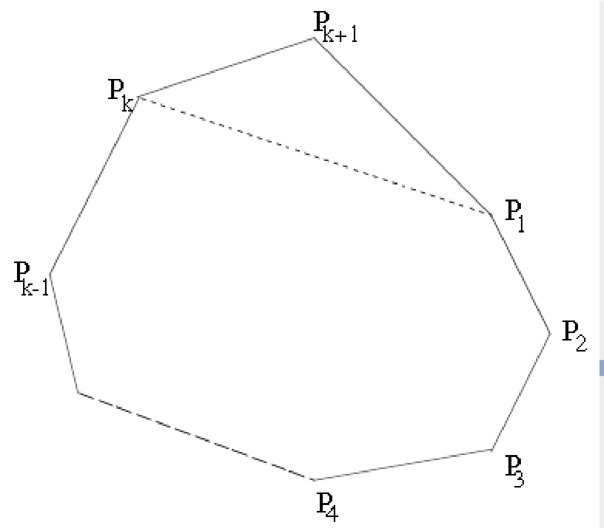
- **Basis**

  Untuk nilai $n = 3$, poligon akan berbentuk segitiga dengan jumlah sudut 180°. Jumlah sisi sebanyak 3 sehingga $180(3 - 2) = 180^\circ$. Jadi untuk $n = 3$ proposisi benar

- **Induksi**

  Asumsikan bahwa jumlah sudut dalam poligon dengan n sisi yaitu $180(n - 2)^\circ$ adalah benar (hipotesis induksi).

  Kita ingin menunjukkan bahwa jumlah sudut poligon yang memiliki n+1 sisi yaitu $180(n - 1)^\circ$



Pada gambar diatas dapat ditunjukkan terdapat dua bagian yaitu segitiga $P_1P_nP_{n+1}$) dan poligon dengan n sisi

Jumlah sudut dalam poligon n sisi menurut asumsi yaitu $180(n-2)^\circ$ dan jumlah sudut di dalam untuk segitiga yaitu 180°.

Jadi jumlah sudut dalam dari poligon dengan n + 1 sisi yaitu $180(n-2)^\circ + 180^\circ = 180(n-1)^\circ$.

- Karena basis dan langkah induksi benar, maka proposisi di atas terbukti benar.

Contoh 4. Buktikan pernyataan "Untuk membayar biaya pos sebesar *n* rupiah ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 rupiah" benar.

<u>Penyelesaian</u>:

(i) Basis induksi. Untuk membayar biaya pos Rp8 dapat digunakan satu buah perangko Rp3 sen dan satu buah perangko Rp5 saja. Ini jelas benar.

(ii) Langkah induksi. Andaikan $p(n)$ benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar n ($n \geq 8$) rupiah dapat digunakan perangko Rp3 dan Rp5 (hipotesis induksi).

Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar n + 1 rupiah juga dapat menggunakan perangko Rp3 dan perangko Rp5. Ada dua kemungkinan yang perlu diperiksa:

(a) Kemungkinan pertama, misalkan kita membayar biaya pos senilai n rupiah dengan sedikitnya satu perangko Rp5. Dengan mengganti satu buah perangko senilai Rp5 dengan dua buah perangko Rp3, maka akan diperoleh susunan perangko senilai n + 1 rupiah.

(b) Kemungkinan kedua, jika tidak ada perangko Rp5 yang digunakan, biaya pos senilai n rupiah menggunakan perangko Rp3 semuanya. Karena $n \geq 8$, setidaknya harus digunakan tiga buah perangko Rp3. Dengan mengganti tiga buah perangko 3 rupiah dengan dua buah perangko Rp5, akan dihasilkan nilai perangko n + 1 rupiah. ■

Latihan 2

1. Sebuah ATM (Anjungan Tunai Mandiri) hanya menyediakan pecahan uang Rp20.000 dan Rp50.000.

   Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

2. Untuk biaya pos berapa saja yang dapat menggunakan perangko senilai Rp4 dan Rp5? Buktikan jawabanmu dengan prinsip induksi matematik.

Prinsip Induksi Kuat

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat. Kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.
- Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

  1. $p(n_0)$ benar, dan

  2. jika $p(n_0)$, $p(n_0+1)$, …, $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$,.

Contoh 5. Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

Basis induksi. Jika $n = 2$, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa bilangan 2, 3, …, n dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa $n + 1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Ada dua kemungkinan nilai n + 1:

(a) Jika $n + 1$ sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

(b) Jika $n + 1$ bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis $n + 1$ tanpa sisa. Dengan kata lain,

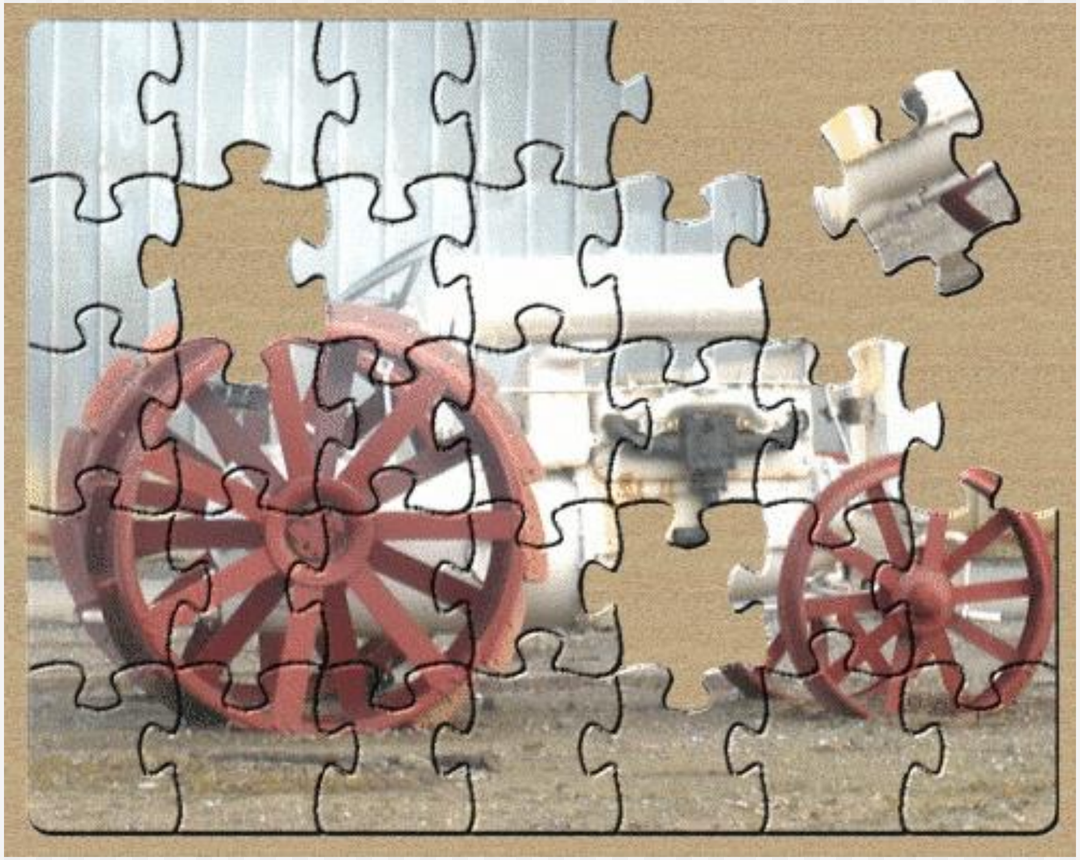
$$(n + 1)/ a = b \quad \text{atau } (n + 1) = ab$$

yang dalam hal ini, $2 \le a \le b \le n$. Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, $n + 1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \ge 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

- **Contoh 6.** [LIU85] Teka-teki susun potongan gambar (*jigsaw puzzle*) terdiri dari sejumlah potongan (bagian) gambar (lihat Gambar). Dua atau lebih potongan dapat disatukan untuk membentuk potongan yang lebih besar. Lebih tepatnya, kita gunakan istilah blok bagi satu potongan gambar. Blok-blok dengan batas yang cocok dapat disatukan membentuk blok yang lain yang lebih besar.

Akhirnya, jika semua potongan telah disatukan menjadi satu buah blok, teka-teki susun gambar itu dikatakan telah dipecahkan. Menggabungkan dua buah blok dengan batas yang cocok dihitung sebagai satu langkah. Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan n – 1 langkah untuk memecahkan teki-teki itu.

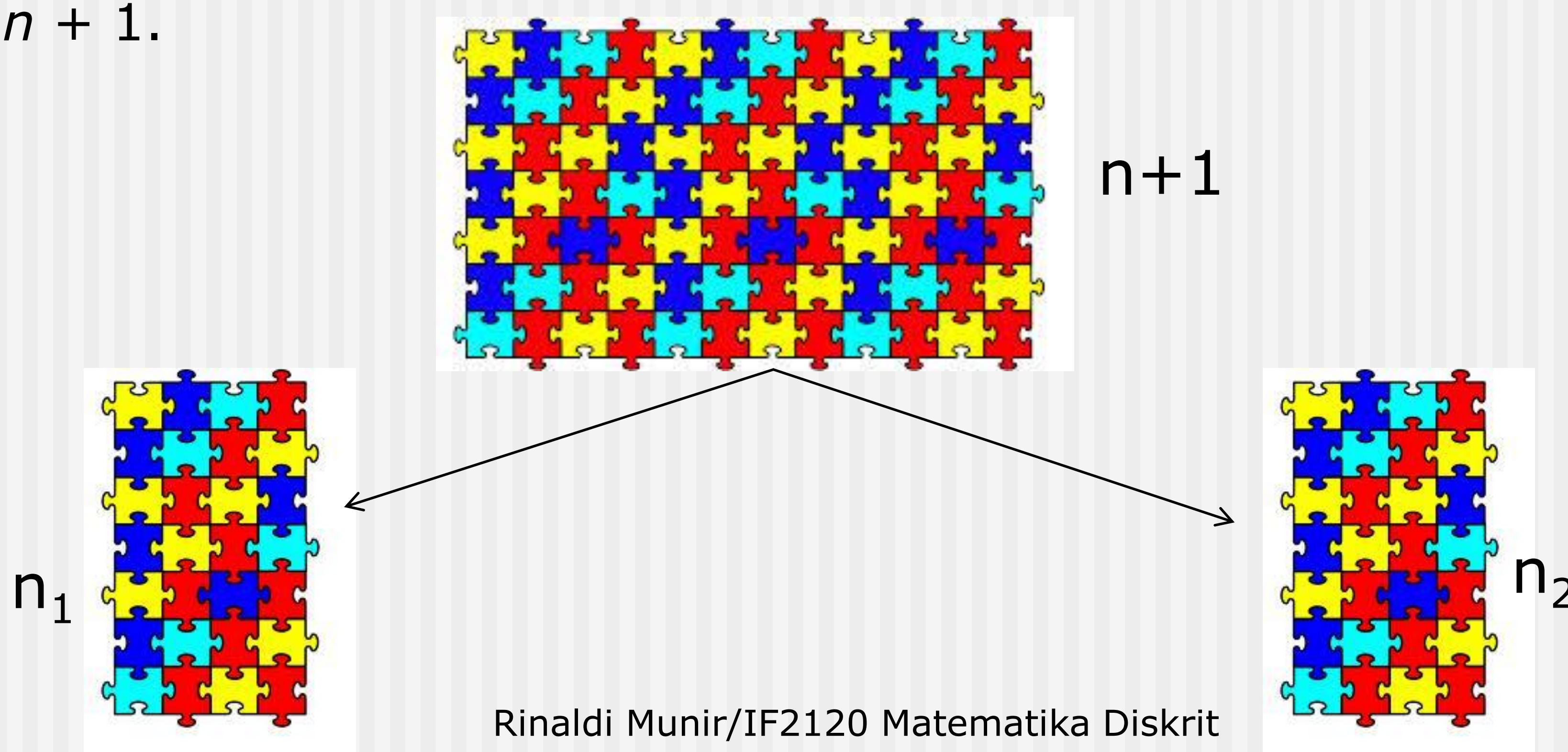


Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk teka-teki susun gambar dengan satu potongan, tidak diperlukan langkah apa-apa untuk memecahkan teka-teki itu.

(ii) Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa untuk teka-teki dengan n potongan (n = 1, 2, 3, …, k) diperlukan sejumlah n – 1 langkah untuk memecahkan teka-teki itu adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus membuktikan bahwa untuk n + 1 potongan diperlukan n langkah.

Bagilah n + 1 potongan menjadi dua buah blok –satu dengan n_1 potongan dan satu lagi dengan n_2 potongan, dan $n_1 + n_2 = n + 1$.



Untuk langkah terakhir yang memecahkan teka-teki ini, dua buah blok disatukan sehingga membentuk satu blok besar. Menurut hipotesis induksi, diperlukan n_1 - 1 langkah untuk menyatukan blok yang satu dan n_2 – 1 langkah untuk menyatukan blok yang lain. Digabungkan dengan langkah terakhir yang menyatukan kedua blok tersebut, maka banyaknya langkah adalah

$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1$ langkah terakhir $= (n_1 + n_2) - 2 + 1 = n + 1 - 1 = n$.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar maka terbukti bahwa suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan n - 1 langkah untuk memecahkan teki-teki itu.

Latihan 3

1. Jika A_1, A_2, …, A_n masing-masing adalah himpunan, buktikan dengan induksi matematik hukum De Morgan rampatan berikut:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

2. Buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.

3. Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali saja. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n - 1)/2$.

4. Perlihatkan bahwa $[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n)] \rightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \rightarrow p_n]$ adalah tautologi bilamana p_1, p_2, …, p_n adalah proposisi.

Apa yang salah dari pembuktian induksi matematik ini?

Tunjukkan apa yang salah dari pembuktian di bawah ini yang menyimpulkan bahwa semua kuda berwarna sama?

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa semua kuda di dalam sebuah himpunan berwarna sama.

Basis induksi: jika kuda di dalam himpunan hanya seekor, jelaslah $p(1)$ benar.

Langkah induksi: Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa semua kuda di dalam himpunan n ekor kuda berwarna sama. (hipotesis)

Untuk membuktikan $p(n+1)$ benar, tinjau untuk himpunan dengan $n + 1$ kuda; nomori kuda-kuda tersebut dengan 1, 2, 3, …, n, $n+1$.

Tinjau dua himpunan, yaitu n ekor kuda yang pertama (1, 2, …n) harus berwarna sama, dan n ekor kuda yang terakhir (2, 3, …, n, $n+1$) juga harus berwarna sama.

Karena himpunan n kuda pertama dan himpunan n kuda terakhir beririsan, maka semua $n+1$ kuda harus berwarna sama. Ini membuktikan bahwa $P(n+1)$ benar. Kesimpulannya: p(n) benar.

Penyelesaian: langkah induksi tidak benar untuk himpunan dengan dua ekor kuda (yaitu ketika $n + 1 = 2$), sebab dua himpunan yang dibentuk tidak beririsan. Himpunan pertama berisi kuda bernomor 1, sedangkan himpunan kedua kuda bernomor 2.

- Apa yang salah dalam pembuktian dengan induksi berikut ini?

Teorema: Untuk setiap bilangan bulat tak-negatif n, berlaku $5n = 0$.

Basis induksi: Untuk $n = 0$, maka $5 \cdot 0 = 0$ benar)

*Langkah ind*uksi: Misalkan bahwa $5n = 0$ untuk semua bilangan bulat tak-negatif n. (hipotesis induksi)

Untuk membuktikan $p(n+1)$, tulislah $n + 1 = i + j$, yang dalam hal ini i dan j adalah bilangan asli yang kurang dari $n+1$.

Selanjutnya,
$$\begin{aligned} 5(n+1) &= 5(i + j) \\ &= 5i + 5j \\ &= 0 + 0 \quad \text{(menurut hipotesis induksi)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Darikedua langkah di atas, maka terbukti untuk setiap bilangan bulat tak-negatif n, berlaku $5n = 0$.

Jawaban:

Kesalahan terjadi ketika berpindah dari $n = 0$ ke $n = 1$, sebab 1 tidak dapat ditulis sebagai penjumlahan dua buah bilangan asli.

Aplikasi Induksi Matematik untuk membuktikan kebenaran program

function Exp(a:**integer**, m: **integer**)
{ Fungsi untuk menghitung a^m *}*
Deklarasi
  k, r : **integer**
Algoritma:
  $r \leftarrow 1$
  $k \leftarrow m$
  while ($k > 0$)
    $r \leftarrow r * a$
    $k \leftarrow k - 1$
  end
  return r
  { Computes : $r = a^m$
  Loop invariant : $r \times a^k = a^m$
  }

Buktikan algoritma di atas **benar** dengan induksi matematika, yaitu di akhir algoritma fungsi mengembalikan nilai a^m

Misal r_n dan k_n adalah nilai berturut-turut dari r dan k, setelah melewati kalang (*loop*) *while* sebanyak n kali, $n \geq 0$.

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi: $r_n \times a^{k_n} = a^m$, $n \geq 0$. Akan ditunjukkan bahwa $p(n)$ benar dengan induksi matematika

(i) Basis:

Untuk $n = 0$, maka $r_0 = 1$, $k_0 = m$.

Maka $p(0)$ benar sebab

$$r_0 \times a^{k_0} = a^m \Leftrightarrow 1 \times a^m = a^m$$

(ii) Langkah Induksi

Asumsikan $p(n)$ benar untuk $n \geq 0$, yaitu setelah melewati kalang n kali, yaitu $r_n \times a^{k_n} = a^m$. (hipotesis)

Kita harus menunjukkan $p(n+1)$ benar, yaitu untuk satu tambahan iterasi kalang *while*, maka

$$r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} = a^m$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut: Setelah satu tambahan iterasi melewati kalang,

$$r_{n+1} = r_n \times a \text{ dan } k_{n+1} = k_n - 1 \quad \text{maka}$$

$$\begin{aligned} r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} &= (r_n \times a) \times a^{k_n - 1} \\ &= (r_n \times a) \times a^{k_n} \times a^{-1} \\ &= r_n \times a^{k_n} = a^m \quad \text{(dari hipotesis induksi)} \end{aligned}$$

Jadi, $r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} = a^m \rightarrow p(n+1)$ benar

Karena basis dan langkah induksi benar, maka $p(n)$ adalah benar untuk setiap $n \geq 0$. Jadi algoritma benar.

Latihan

1. Buktikan dengan induksi matematik bahwa untuk n ≥ 1 turunan $f(x) = x^n$ adalah $f'(x) = nx^{n-1}$

2. Suatu *string* biner panjangnya n bit. Jumlah *string* biner yang mempunyai bit 1 sejumlah genap adalah 2^{n-1}. Buktikan pernyataan tersebut untuk $n \geq 1$.

3. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jika A, B_1, B_2, ..., B_n adalah himpunan, $n \geq 2$, maka

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots (A \cap B_n)$$

4. Temukan kesalahan dalam pembuktian berikut. Kita ingin membuktikan bahwa $a^n = 1$ untuk semua bilangan bulat tak-negatif n bilamana a adalah bilangan riil tidak-nol. Kita akan membuktikan ini dengan prinsip induksi kuat.

Basis induksi. Untuk $n = 0$, jelas $a^0 = 1$ adalah benar sesuai definisi a^0.

Langkah induksi. Misalkan pernyataan tersebut benar untuk 0, 1, 2, …, n, yaitu $a^0 = 1$, $a^1 = 1$, $a^2 = 1$, …, $a^n = 1$. Kita ingin memperlihatkan bahwa $a^{(n+1)} = 1$. Untuk menunjukkan hal ini, maka

$$a^{n+1} = \frac{a^n \cdot a^n}{a^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1} \quad \text{(dari hipotesis induksi)}$$

$$= 1$$